UO‘K 62-503.5

BERK TIZIMLAR QUTBLARINI JOYLASHTIRISHNING ENG KICHIK KVADRATLAR USULI

Boyeva Oqila Husanovna – texnika fanlari bo‘yicha falsafa doktori, dotsent,
e-mail: boyeva-oqila@mail.ru

Navoiy davlat konchilik va texnologiyalar universiteti, Navoiy sh., O‘zbekiston

Annotatsiya: *Ushbu maqolada holat vektoriga nisbatan o‘lchami kichikroq bo‘lgan chiqish vektoridan doimiy teskari aloqada foydalanilganda, bitta kirishga ega bo‘lgan tizimlarda berk tizim qutblariga cheklovlar o‘rnatish usuli taklif etilgan. Qutblar bo‘yicha bunday cheklovlar chiziqli tenglamalardan iborat bo‘lib, tizimni fazoviy holat ko‘rinishida tavsiflovchi matritsalardan olinadi. Berk kontur qutblarini joylashtirish masalasi chiqish bo‘yicha teskari aloqa vektoridan foydalanib qutblar bo‘yicha cheklov tenglamalari orqali yechiladi. So‘ngra, birlik rangga ega chiqish bo‘yicha teskari aloqa yordamida ko‘p o‘lchamli tizimlarda qutblarni ixtiyoriy joylashtirish mumkin.*

Kalit so‘zlar: *ko‘p o‘lchamli tizim, modal boshqarish, qutblarni joylashtirish, berk kontur.*

UDC 62-503.5

POLE PLACEMENTS OF A CLOSED SYSTEM BASED ON THE LEAST SQUARES METHOD

Boyeva Oqila Husanovna – doctor of philosophy in Technical Sciences, docent
e-mail: boyeva-oqila@mail.ru

Navoi State University of mining and technology, Navoi city, Uzbekistan

Abstract. *This paper proposed a way to impose constraints on the closed system poles in systems with a single input when constant feedback is used from an output vector that is smaller in size than the state vector. Such restrictions on poles consist of linear equations and are obtained from matrices that characterize the system in the form of a spatial state. The issue of closed loop pole placement is solved by polar constraint equations using the output feedback vector. The poles can then be optionally placed in multidimensional systems using a single-rank output feedback.*

Keywords*: multidimensional system, modal control, pole placement, closed loop.*

УДК 62-503.5

РАЗМЕЩЕНИЕ ПОЛЮСОВ ЗАКРЫТОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Боева Акила Хусановна-доктор философии по техническим наукам, доцент,
e-mail: boyeva-oqila@mail.ru
Навоийский государственный горно-технологический университет, г. Навои, Узбекистан

Аннотация. *В данной статье предложен способ наложения ограничений на полюса замкнутой системы в системах с одним входом, когда используется постоянная обратная связь от выходного вектора, который меньше по размеру, чем вектор состояния. Такие ограничения на полюса состоят из линейных уравнений и получаются из матриц, которые характеризуют систему в виде пространственного состояния. Проблема размещения полюсов замкнутого контура решается уравнениями полярных ограничений с использованием выходного вектора обратной связи. Затем полюса могут быть опционально размещены в многомерных системах с использованием одноранговой выходной обратной связи.*

Ключевые слова: *многомерная система, модальное управление, размещение полюсов, замкнутый контур.*

Kirish

Tizimlarni holatlar fazosida tasvirlashga asoslangan va eng keng foydalaniladigan sintezlash usullaridan biri – modal boshqarish usuli hisoblanadi. Modal boshqarish masalasi, chiziqli teskari aloqa yordamida, chiziqli berk tizimlar xarakteristik tenglamalarining ildizlarini belgilashdan iborat bo‘lib, to‘liq o‘rganilgan va boshqarish nazariyasi va amaliyotida keng qo‘llaniladi [1-6].

So‘nggi yillarda teskari aloqali rostlagichlaridan foydalanib qutblarni joylashtirish usuli bo‘yicha bir qator tadqiqotlar olib borilgan. Ko‘pgina ilmiy tadqiqot ishlarida teskari aloqa va tizimning istalgan holatini o‘lchash uchun cheklovlar mavjud. Biroq, ko‘pgina amaliy ishlarda tizimning barcha holatini aniqlash imkoniyati mavjud emas va o‘lchovlar chekli sonidagi mavjud natijalar orqali amalga oshiriladi. Boshqaruv tizimini loyihalashda eng keng tarqalgan yondashuv – Luenberger holat rekonstruktori kabi qo‘shimcha vositalarni qabul qiluvchi yondashuv hisoblanadi. Ushbu yondashuvdan yuqoridagi kabi imkoniyatsiz holatlarni baholashda va bunday baholashdan holat bo‘yicha teskari aloqali to‘liq boshqaruv qonunini amalga oshirishda foydalaniladi. Yana bir yondashuv – mavjud chiqish signallari yordamida qutblarni joylashtirish uchun dinamik teskari aloqa kompensatoridan foydalanishdir. Bu ikkala yondashuv printsipial jihatdan har doim samara berishini aniq bo‘lsa-da, ular muhandislik yoki iqtisodiy nuqtai nazardan katta samara bermasligi mumkin.

Shuningdek, tizimning barcha holatlarini aniqlash zarurligi, hamda boshqaruv tuzilmasining soddaligini hisobga olib ko‘pincha kam sonli teskari aloqa konturlaridan foydalanish tavsiya etiladi. Bu cheklovlar kompleks tekislikda qutblarni joylashtirish uchun zarur bo‘lgan doimiy chiqish bo‘yicha teskari aloqani hisoblashning ikkita usulini ishlab chiqishda foydalaniladi. Ushbu usulning soddaligi va chiziqliligi holat rekonstruktori yoki dinamik kompensator yordamida dinamik boshqaruvning yanada murakkab strukturasiga murojaat qilishdan oldin doimiy chiqish bo‘yicha teskari aloqani loyihalash imkoniyatini o‘rganishga imkon beradi.

Bitta kirishga ega bo‘lgan tizimlarda berk konturning qutblariga quyiladigan cheklovlar

Bitta kirish ega bo‘lgan boshqariluvchi va kuzatiluvchi tizimni ko‘rib chiqamiz:

$$x = Ax + bu$$
$$y = Cx \quad ,$$

Ushbu tizimning uzatish funksiyasi quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$Y(s) = \frac{w(s)}{F(s)} U(s),$$

bu yerda

$$\frac{w(s)}{F(s)} = \frac{C adj(sI - A) b}{|sI - A|} = \frac{1}{s^n + d_n s^{n-1} + \ldots + d_1} \begin{bmatrix} m_{11} + & \ldots & m_{1n} s^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{l1} + & \ldots & m_{ln} s^{n-1} \end{bmatrix}.$$

$u = v - ky$ – chiqish bo‘yicha teskari aloqali boshqarish qonunini, bu yerda v va k – kiruvchi kattalik va l-chiqish bo‘yicha teskari aloqa vektori. Bunday holatda teskari aloqali xarakterli ko‘phad quyidagicha ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$H(s) = |sI - A + bkC| = s^n + a_n s^{n-1} + \ldots + a_1 .$$

Ma’lumki, $H(s)$ va k bir-biriga bevosita bog‘liq

$$H(s) = F(s) + kw(s),$$

$$\sum_{i=1}^{l} k_i w_i(s) = H(s) - F(s). \tag{1}$$

1-tenglamada $H(s), F(s)$ va $w_1(s),...,w_l(s)$ ni o‘rniga s ko‘phadlarni qo‘yish va har ikki tomonda s ning bir xil darajalaridagi koeffitsiyentlarni tenglashtirish orqali quyidagini olishimiz olamiz [8-10]:

$$M^T k^T = a - d\,, \tag{2}$$

bu yerda M – to‘liq rangli $w(s)$ koeffitsiyentlarning $l \times n$ o‘lchamli matritsasi; a va d – mos ravishda $H(s)$ va $F(s)$ koeffitsiyentlarning n-ustunli vektorlari; 2-tenglama l noma’lumli n tenglamadan qayta aniqlangan $k_1,...,k_l$ tizimdir. Agar har qanday l tenglamaning yechimi qolgan $n-l$ tenglamalarni qanoatlantirsa, bu tenglama k uchun yechimga ega bo‘ladi [5-8].

$$Letg(s) = adj(sI - A)b = \begin{bmatrix} l_{11} + & \dots & l_{1n}s^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & \dots & l_{nn}s^{n-1} \end{bmatrix}$$

kirish holat hisoblagichining uzatish funktsiyasi vektori quyidagicha bo‘lsin:

$$X(s) = \frac{g(s)}{F(s)} U(s).$$

u holda $w(s) = Cg(s)$ va shu sababli $M = CL$, bu yerda L – $g(s)$ ning koeffitsiyentlaridan tashkil topgan $n \times n$ - o‘lchamli nosingulyar matritsa.

2-tenglamada M ni CL ga almashtirib quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$L^T C^T k^T = a - d\,,$$

va bunda $\left(L^T\right)^{-1}$ dastlabki ko‘paytirish quyidagini beradi:

$$Ek^T = I\left(L^T\right)^{-1}(a - d), \tag{3}$$

bu yerda $E = C^T$ – $n \times l$ -o‘lchamli matritsa, l –to‘liq rangli matritsa, I – $n \times n$ -o‘lchamli birlik matritsa. E matritsaning l chiziqli mustaqil qatorlaridan $l \times l$ - o‘lchamli E_u matritsaning shakllanishi va I matritsa bir xil qatorlar to‘plamidan $l \times n$ -o‘lchamli I_u matritsalari 3 - tenglamani ikkita tenglamaga ajratishi mumkin, ya’ni:

$$E_u k^T = I_u\left(L^T\right)^{-1}(a - d) \tag{4}$$

va

$$E_l k^T = I_l\left(L^T\right)^{-1}(a - d), \tag{5}$$

bu yerda E_l va I_l mos ravishda E va I ning qolgan qatorlardan hosil bo‘lgan $(n-l) \times l$ va $(n-l) \times n$ matritsalardir. 4-tenglamadan a bo‘yicha k^T ni hisoblash va olingan yechimni 5-tenglamaga qo‘yish 3-tenglama uchun quyidagi shartini beradi:

$$\alpha a = \beta \tag{6}$$

$$\alpha = \left\{I_l - E_l E_u^{-1} I_u\right\}\left(L^T\right)^{-1} = S\left(L^T\right)^{-1}, \tag{7}$$

bu yerda $(n-l) \times n$ – doimiy matritsa, $\beta = \alpha d$ – $n-l$ -o‘lchamli ustunning doimiy vektori. 6-tenglamada S – C ga bog‘liq bo‘lgan $(n-l) \times n$ -o‘lchamli matritsa bo‘lib, $S = I_l - C_l^T\left(C_u^T\right)^{-1} I_u$ dan hisoblanadi va L faqat A va b ga bog‘liq bo‘lgan $n \times n$ -o‘lchamli matritsa.

6-tenglama k - chiqish bo‘yicha teskari aloqa vektori yordamida berk konturli xarakterli polinomlar sinfining $a_1,...,a_n$ koeffitsiyentlarga $n-l$ chiziqli cheklovlar qo‘yadi:

$$H(s)=\left|sI-A+bkC\right|=s^n+a_ns^{n-1}+...+a_1.$$

Cheklov matritsasi a to‘liq rang $n-l$ ga ega, ya’ni a matritsani qanoatlantirishi kerak bo‘lgan $n-l$ – chiziqli mustaqil [8-10].

6-tenglamadagi shart qanoatlantirilsa, teskari aloqa uchun qayta aniqlangan tenglama (2- tenglama) to‘g‘ri hisoblanadi va chiqish bo‘yicha teskari aloqa vektori k 4-tenglamadan quyidagicha hisoblanadi:

$$k^T=R\left(L^T\right)^{-1}(a-d), \tag{8}$$

bu yerda

$$R=E_u^{-1}I_u=\left(C_u^T\right)^{-1}I_u. \tag{9}$$

Bunday holatlar uchun p teskari aloqa vektori quyidagicha belgilanadi:

$$p^T=I_u\left(L^T\right)^{-1}(a-d), \tag{10}$$

$$H(s)=s^n+a_ns^{n-1}+...+a_1.$$

Ushbu bo‘limda yuqorida keltirilgan cheklov tenglamasidan tizimning qutblarini kompleks tekislikda zaruriy holatda joylashtirish uchun chiqish bo‘yicha doimiy teskari aloqa vektorini hisoblash usullarini ishlab chiqishda foydalanish mumkinligini ko‘rib chiqamiz. Bu birinchi navbatda koeffitsiyentlar bo‘yicha $H(s)$ qo‘shimcha cheklovlar sifatida teskari aloqa qutblarining spetsifikatsiyalarini ifodalash orqali amalga oshiriladi va keyin ular $\alpha a=\beta$ cheklov tenglamasi bilan birga hisoblanadi.

Berk konturli xarakteristik polinom quyidagicha berilgan bo‘lsin:

$$H(s)=s^n+a_ns^{n-1}+...+a_3s^2+a_2s+a_1. \tag{11}$$

Berk konturning haqiqiy qutbi $s=\lambda$ ko‘rinishida berilgan bo‘lsa

$$H(\lambda)=a_1+a_2\lambda+a_3\lambda^2+...+\lambda^n=0,$$

$$\begin{bmatrix}1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}. \tag{12}$$

10-tenglama $H(s)$ koeffitsientlarga bitta chiziqli cheklov qo‘yadi. Shuningdek, berk konturning $s=\rho\pm jw$ da berilgan kompleks birlashgan qutblarning jufti quyidagi shartni bajarilishini talab qiladi:

$$H(\rho\pm j\omega)=H\left\{r\quad\exp(\pm j\theta)\right\}=a_1+a_2\left\{r\quad\exp(\pm j\theta)\right\}+$$
$$+a_3\left\{r^2\quad\exp(\pm2j\theta)\right\}+\ldots+a_n\left[r^{n-1}\quad\exp\left\{\pm(n-1)j\theta\right\}\right]+r^n\quad\exp(\pm nj\theta)=0$$

bu yerda $r=\sqrt{\left(\rho^2+w^2\right)}$ va $\theta=\tan^{-1}w/\rho$. Bunda haqiqiy va mavhum qismlarni nolga tenglashtirib, quyidagilarni olamiz:

$$\operatorname{Re}H\left\{r\quad\exp(\pm j\theta)\right\}=a_1+a_2(r\quad\cos\theta)+a_3\left(r^2\quad\cos2\theta\right)+\dots+$$
$$+a_n\left(r^{n-1}\quad\cos(n-1)\theta\right)+r^n\cos n\theta=0$$
$$\operatorname{Im}H\left\{r\quad\exp(\pm j\theta)\right\}=a_2(r\quad\sin\theta)+a_3\left(r^2\quad\sin2\theta\right)+...+$$
$$+a_n\left(r^{n-1}\quad\sin(n-1)\theta\right)+r^n\sin n\theta=0$$

Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{bmatrix} 1 & r\cos\theta & r^2\cos 2\theta & \dots & r^{n-1}\cos(n-1)\theta \\ 0 & r\sin\theta & r^2\sin 2\theta & \dots & r^{n-1}\sin(n-1)\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r^n\cos n\theta \\ -r^n\sin n\theta \end{bmatrix}. \quad (13)$$

13-tenglama koeffitsiyentlarga $H(s)$ ikkita chiziqli cheklovni qo‘yadi. Shuningdek, agar m ko‘paytmali takrorlanuvchi qutbi ko‘rsatilgan bo‘lsa, $H(s)$ va uning s ga nisbatan birinchisi $m-1$ hosilalari belgilangan qutbda nolga teng bo‘lishi kerak. Chunki $H(s)$ ning hosilalari $a_1, a_2, ..., a_n$ da chiziqli, ular $a=[a_1, a_2, ..., a_n]^T$ da m ta chiziqli cheklovlarni beradi.

Bu yerda berk kontur qutblarining joylashishidan foydalanib berk kontur xarakterli polinomi koeffitsiyentlariga bitta chiziqli cheklov qo‘yish mumkinlini ko‘rsatib o‘tdik. Bu shunchaki belgilangan qutbda xarakterli polinomning nolga teng bo‘lishini talab qiladi. Shuning uchun, berk kontur qutblarning $p \le n$ pozitsiyalari berilganda, p chiziqli cheklovlar koeffitsiyent $H(s)$ larni qanoatlantirishi zarur.

$$\theta a = \omega. \quad (14)$$

Shunday qilib, qutblarni joylashtirish muammosi cheklov tenglamasini $\alpha a = \beta$ qanoatlantiruvchi mos $a = a_0$ vektorni va $\theta a = w$ qutblarni spetsifikatsiyalash tenglamasini topish zaruratini tug‘diradi. Cheklov tenglamasining bajarilishi chiqish bo‘yicha teskari aloqalarning mavjudligini ta’minlaydi va shuning uchun bu tenglama aniq bajarilishi kerak. Quyida qutblarni kompleks tekislikda ixtiyoriy holatda joylashtirishning eng kichik kvadratlar usuli taklif etilgan. Ushbu usulda eng kichik kvadratlar masalasini yechish uchun psevdo-ag‘darish matritsasidan foydalanadi.

Qutblarni joylashtirishning eng kichik kvadratlar usuli

Qutblarni joylashtirishning bunday usuli eng yaxshi natija beradigan usullardan biri hisoblanadi. Cheklov tenglamasi $\alpha a = \beta$ esa chiqish bo‘yicha teskari aloqaga erishish uchun har doim kerak. Shuning uchun $\alpha a = \beta$ tenglamaning yechimini topishimiz zarur, bu orqali esa berk kontur qutblarining kompleks tekislikda zaruriy holatda joylashishini $\theta a = w$ ta’minlash mumkin. Bu avvalo cheklov tenglamasining $\alpha a = \beta$ yechimlar to‘plamini topish orqali amalga oshiriladi, ya’ni chiqish bo‘yicha teskari aloqa orqali olinishi mumkin bo‘lgan xarakterli teskari aloqa polinomlari sinfining koeffitsientlari va keyinchalik $E = \|\theta a - w\|$ xatolik minimal bo‘lishi uchun $\theta a = w$ ning teskari aloqa qutb xususiyatlariga imkon qadar yaqinroq javob beradigan ushbu to‘plam elementlarini tanlash zarur. Ushbu muammoni psevdo-ag‘darish matritsasi yordamida yechish mumkin.

$\alpha a = \beta$ cheklov tenglamasini n ta noma’lumli $n-l$ tenglamalarning $a_1, ..., a_n$ noaniq to‘plami deb hisoblash mumkin. Ushbu tenglama $a = (a_1, ..., a_n)^T$ uchun cheksiz ko‘p sonli aniq yechimlarga ega. Ushbu tenglamaning umumiy yechimi quyidagi shaklda ifodalanadi:

$$a = \alpha^+\beta + (I - \alpha^+\alpha)z, \quad (15)$$

bu yerda $\alpha^+ = \alpha^T(\alpha\alpha^T)^{-1}$ va z – n -ustunlarning ko‘paytma vektori. 15-tenglama berk konturli xarakterli ko‘phad berk konturdagi to‘plamning koeffisientlarini beradi. Ularni chiqish bo‘yicha teskari aloqa orqali olish mumkin.

$$H(s) = s^n + a_n s^{n-1} + ... + a_1.$$

$\alpha a = \beta$ ning yechimini topish uchun, berk konturning qutblari kompleks tekislikda joylashuviga maksimal darajada mos keladigan bo‘lsa, z vektorning mos keladigan qiymati – z_0 ni topishimiz kerak. 15 - tenglamada a ni $\theta a - w$ almashtirib, quyidagini olamiz:

$$\theta\left(\alpha^+\beta + \left(I - \alpha^+\alpha\right)z\right) = w$$

yoki

$$Sz = T\,, \tag{16}$$

bu yerda $S = \theta\left(I - \alpha^+\alpha\right)$ va $t = W - \theta\alpha^+\beta$ – mos ravishda $p \times n$ va $p \times 1$ ning doimiy matritsalari. 16-tenglamani eng kichik kvadratlar usuli bilan yechish quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$z_0 = S^+T + \left(I - S^+S\right)\xi\,,$$

bu yerda S^+ – S psevdo-ag‘darish matritsasi, ξ – n - ustunlarning xosilaviy vektori. Bunda, 15-tenglamaga $z = z_0$ ni qo‘yib quyidagini olishimiz mumkin:

$$a_0 = \alpha^+\beta + \left(I - \alpha^+\alpha\right)\left(I - S^+S\right)\xi\,,$$

$\left(I - \alpha^+\alpha\right)\left(I - S^+S\right) = 0$ deb hisoblasak

$$a_0 = \alpha^+\beta + \left(I - \alpha^+\alpha\right)S^+T\,, \tag{17}$$

bu yerda $a = a_0$ – eng kichik kvadratlar usulida $\theta a - w$ ni qanoatlantiradigan $\alpha a = \beta$ ning aniq yechimi hisoblanadi, ya‘ni $E = \|\theta a - w\|$ minimal bo‘lgandan bu usul chiqish bo‘yicha teskari aloqa orqali olinishi mumkin bo‘lgan eng yaxshi usul. Eng kichik kvadratlar xatoligi $E = \|\theta a - w\|$ berk kontur qutblarining kompleks tekislikda qanchalik to‘g‘ri joylashganligini ko‘rsatadi.

Berk konturning berilgan qutblari soniga qarab, ikkita imkoniyat mavjud:

(a) Agar $p = l$ bo‘lsa, qutblarning aniq joylashishi, umumiy holda, $\theta a = w$ va $E_0 = 0$ ning aniq yechimi $a = a_0$ hisoblanadi. Buning uchun $SS^+ = I$ bo‘lishi talab qilinadi. Bunda S - p va $S^+ = S^T\left(SS^T\right)^{-1}$ da to‘liq rangga ega bo‘lishi kerak.

(b) Agar $p > l$ bo‘lsa, qutblarning aniq joylashishi, umumiy olganda, imkonsizdir va shuning uchun $a = a_0$ - $\theta a = w$ va $E_0 \neq 0$ ning taxminiy yechimi hisoblanadi. Bu esa o‘z navbatida $SS^+ \neq I$ talab qiladi, shuning uchun S to‘liq rangli emas.

a_0 topilgandan so‘ng, chiqish bo‘yicha teskari aloqa vektori k 8-tenglama bilan quyidagicha aniqlanadi:

$$k^T = R\left(L^T\right)^{-1}\left[a_0 - d\right]. \tag{18}$$

Berilgan berk kontur qutblari soni chiqishlar soniga teng bo‘lsa, qutblarni aniq joylashtirish mumkin. Bunda kattalashtirish va eng kichik kvadratlar usullari ham aniq natijalarni beradi, hamda quyidagi o‘rinli hisoblanadi:

$$E_0 = \|\theta a_0 - w\|.$$

Biroq, belgilangan berk kontur qutblari soni chiqishlar sonidan ko‘p bo‘lganda, qutblarni aniq joylashtirish umuman mumkin emas. Bunday holatda eng kichik kvadratlar usuli $E = \|\theta a - w\|$ chiqish bo‘yicha teskari aloqa orqali erishish mumkin bo‘lgan eng yaxshi natijani beradi.

Xulosa

Ushbu maqolada doimiy chiqishga ega bo‘lgan teskari aloqa yordamida bitta kirishga ega ko‘p o‘lchamli tizimlarda qutblarni joylashtirish masalasi o‘rganilgan. Berk konturning xarakterli polinomlarining chiqish bo‘yicha teskari aloqadan foydalanib hisoblab topilgan koeffitsientlari kompleks tekislikda qutblarni joylashtirishning chiziqli cheklov tenglamalarini qanoatlantirishi zarur.

Ushbu tenglamalarning chiziqliligidan foydalanib masalani yechishda psevdo-ag‘darish matritsasi qo‘llaniladi. Bu cheklov tenglamasi muammoni yechishning boshqa usullariga nisbatan sezilarli darajada yaxshi natija beradi.

Adabiyotlar

[1] Григорьев В.В., Журавлёва Н.В., Лукьянова Г.В., Сергеев К.А. Синтез систем автоматического управления методом модального управления // Учебное пособие. – С-Пб: СПбГУ ИТМО, 2007. – 143 с.

[2] Мисриханов М.Ш., Рябченко В.Н. Размещение полюсов в больших динамических системах с многими входами и выходами. – Доклады Российской академии наук, 2011, т. 434, №4. – С.1–3.

[3] Jasur Sevinov, Oqila Boeva, "Synthesis algorithms for adaptive-modal control systems for technological objects with delays", AIP Conference Proceedings 2647, 030007 (2022) https://doi.org/10.1063/5.0104891.

[4] Боева О. Х. Связь расположения полюсов с запасом устойчивости для многомерных регуляторов с наблюдателем управления//Journal of Advances in Engineering Technology. – 2022. – №. 4. – С. 13-18.

[5] Igamberdiev H.Z., Sevinov J.U., Boeva O.H. Algorithms for modal control synthesis in multi-dimensional dynamic system // Chemical Technology, Control and Management. Volume 2021, Issue 5, Article 7. –p. 45-51. DOI: https://doi.org/10.51346/tstu-02.21.5-77-0040, №12.

[6] Севинов Ж.У., Боева О.Х. Программное обеспечение для решения задач модального управления с использованием оптимального алгоритма цифрового регулятора состояний. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ, №DGU 11396 от 22.04.2021г.

[7] Sevinov J.U., Boeva O.H. Adaptive pole placement algorithms for of non-minimum-phase stochastic systems // International scientific and technical journal “Chemical technology. Control and management”. Tashkent. 2020. № 5-6. –pp. 38-43.

[8] Jie Cui, Gangtie Zheng. An iterative state-space component modal synthesis approach for damped systems // Mechanical Systems and Signal Processing 142 (2020) 106558. 1-28 pp.

[9] Boeva O.H., Ibragimova Ch.Q. Pole limitation and output feedback methods of pole placement. Multidisciplinary Scientific Journal. – 2023. – №. 1. – C. 4-9.

[10] Boeva O. H., Ibragimova C. Q. Modal synthesis of control algorithms for multidimensional systems with a given spectrum with incomplete information //scholar. –2023. –T. 1. – №. 3. –C.4-9.