BERNULLI TAQSIMOTI YORDAMIDA QURILGAN KVADRATIK STOXASTIK OPERATORLARNING BITTA SINFI HAQIDA

Meyliyev Xabibulla Jamolovich - dotsent.
Rasulova Moxira Sa'dullayevna –assistant.

TIQXMMI" MTU ning Qarshi irrigatsiya va agrotexnologiyalar instituti. Qarshi sh., O'zbekiston.

Anotatsiya. *Maqolada yangi konstruksiya yordamida qurilgan kvadratik stoxastik operatorlarning traektoriyalari o'rganilib, ularning qo'zg'almas nuqtalari va asimtotik quzg'almas no'qtalari topilgan. Kvadratik stoxastik operatorlarning syurektiv kvadratik stoxastik operatori bo'lish va bo'lmasligi ko'rsatilgan.*

Kalit so'zlar: populyatsiya, har xillik, simpleks, akslantirush, kvadratik operatorlar, avloddan avlodga o'tish, Voltero, zichlik, katak, syurektiv, stoxastik, asli, chastota, genotip chastota, tip, ehtimol, gepoteza, allel, koeffisent, konstruksiya,o'lchov, maxsuslik.

Abstract. *In the article, the trajectories of quadratic stochastic operators built using a new construction are studied, and their fixed points and asymptotic fixed points are found. it is shown that quadratic stochastic operators are surjective quadratic stochastic operators and not.*

Key words: population, diversity, simplex, reflection, Quadratic operators, Generation to generation, Voltero, density, cell, surjective, stochastic, original, frequency, genotype frequency, type, probability, hypothesis, allele, coefficient, construction, measurement, specialty.

Qandaydir biologik populyatsiyani, ya'ni organizmlarni bir-biri bilan yopiq munosabatini qaraymiz. Faraz qilaylik maxsuslik populyatsiyaga kiruvchi har bir maxsuslik qandaydir yagona n ta har xillikdan 1,2,3,…,n bittasida yotsin. Har xilliklar shkalasi (belgilar, fenotiplar, genotiplar) shunday bo'lishi kerakki, har xillikning ota-onasi (ya'ni yaratuvchisi) ***i*** va ***j*** keyingi avloddan-avlodga o'tishdagi birinchi bosqichda har xillik ***k*** ni bir qiymatli ehtimol bilan aniqlasin. Bu ehtimolni (avlodgan-avlodga o'tish koeffitsientini) $p_{ij,k}$ orqali belgilaymiz. O'z-o'zidan ma'lumki bu holda quyidagi shartlar bajariladi:

$$p_{ij,k} \geq 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} p_{ij,k} = 1 \quad \text{hamma natural } i,j,k \text{ lar uchun.}$$

Populatiyatsiya qancha katta bo'lsa, u holda ehtimol sifatida chastotani olish mumkin. U holda uning holatini $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ har xillik ehtimoli sifatida olish mumkin, ya'ni x_i populyatsiyadagi i har xillik bo'ladi. U holda har bir tayinlangan $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ holat uchun ota-onalar juftlig i va j $x_i x_j$ ehtimollik bilan hosil bo'ladi, binobarin, avloddan-avlodga o'tishdagi keyingi bosqichida to'la ehtimollik

$$x_k^{'} = \sum_{i,j=1}^{n} p_{ij,k} x_i x_j \qquad (1)$$

formula orqali ifodalanadi.

$S^{n-1} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0, \quad i=1,2,...,n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ to'plam $n-1$ -o'lchovli simpleks deb ataladi.

O'z-o'zidan ma'lumki $\sum_{k=1}^{n} x_k^{'} = 1$ va $x_k^{'} \geq 0$ bo'ladi. U holda (1) akslantirish S^{n-1} simpleksni o'zini oziga akslantiruvchi kvadratik stoxastik operator deb ataladi. Matematik modullar ichida moduli kvadratik operatorlar bo'ladiganlari asosiy rol o'ynaydi [1].

Kvadratik operatorlarda asosi masalasi kvadratik operatorlarning traektoriyasini o'rganishdan iboratdir. Bu muammo juda ko'p ilmiy ishlarda keltirilgan [2,3,4]. Kvadratik operatorlarning ergodik xossalari o‘rganish [4,5] imiy ishlarda keltirilgan. [4,6] Ilmiy ishlarda kvadratik operatorlarga aloqador bo‘lgan kvadratik protsesslarning sinfi aniqlangan. Xuddi shunday chiziqli operatorlarga taalluqli Markov protsesslari ham aniqlangan.

Bu maqolada kvadratik stoxastik operatorlarning umumiy konstruksiyasini keltiramiz.

Faraz qilaylik (Λ, L) karrali, qirrasiz, davriysiz chekli graf bo‘lsin. Bu erda Λ - grafning uchlari to‘plami, va L-qirralar to‘plamidir.

Φ -esa chekli bo‘lgan allellar to‘plami bolsin. Akslantirish $\sigma : \Lambda \to \Phi$ katak deb ataladi. Ω- orqali hamma kataklar fazosini belgilaymiz va $S(\Lambda, \Phi)$ Ω-chekli to‘plamda aniqlangan hamma ehtimolli taqsimotlar to‘plami. $S(\Lambda, \Phi)$ simpleksni o‘zini o‘ziga akslantiruvchi kvadratik stoxastik operator quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi. Λ_i -lar (Λ, L)-grafning hamma bog‘liq bo‘laklari to‘plamidir, i=1,2,3,…,n. Ixtiyoriy ikkita katak $\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega$ lar uchun

$A(\sigma_1, \sigma_2) = \{x \in \Lambda : \sigma_1(x) = \sigma_2(x)\}$ va $\hat{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \dot{\bigcup}_{J: A(\sigma_1,\sigma_2)\cap\Lambda_J \neq \emptyset} \Lambda_J$

Agar $\tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2) \neq \varnothing$ bo‘lsa, u holda $\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{\sigma \epsilon \Omega : \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{1_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)}}\ yoki\ \sigma_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_{2_{\hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)}}\right\}$, $\hat{A}(\sigma_1, \sigma_2) = \emptyset$ bo‘lgan hol uchun

$$\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) = \left\{\sigma \epsilon \Omega : \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{1_{\Lambda_j}}\ yoki\ \sigma_{\Lambda_j} = \sigma_{2_{\Lambda_j}},\quad j=1,2,3\ldots,n.\right\},$$

Faraz qilaylik $\mu \in S(\Lambda, \Phi)$- Ω da aniqlangan $\mu(\sigma) > 0$ shartni qanoatlantiruvchi qandaydir ehtimolli o‘lchov bo‘lsin, ixtiyoriy $\sigma \in \Omega$ katak uchun avloddan-avlodga o‘tish koeffitsienti $P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}$ ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} \dfrac{\mu(\sigma)}{\mu\left(\Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1,\sigma_2)\right)\right)} & agar\ \ \sigma \epsilon \Omega\left(\Lambda, \hat{A}(\sigma_1, \sigma_2)\right) \\ 0 & qolgan\ hollar\ uchun \end{cases} \quad (2)$$

$S(\Lambda, \Phi)$ simpleksda harakat qiluvchi berilgan avloddan-avlodga o‘tish (2) koeffisienti yordamida qurilgan kvadratik stoxastik operator V quydagicha aniqlanadi: ixtiyoriy $\lambda \in S(\Lambda, \Phi)$ o‘lchov uchun $V\lambda = \lambda' \in S(\Lambda, \Phi)$ o‘lchov ixtiyoriy $\sigma \in \Omega$ katakda

$$\lambda'(\sigma) = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in \Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} \lambda(\sigma_1)\lambda(\sigma_2) \qquad (3)$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Hech qanday qiyinchiliksiz avloddan-avlodga o‘tish koeffisienti quydagi shartlarni qanoatlantirishini ko‘rish mumkin:

$$P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} \geq o, \quad \sum_{\sigma \in \Omega} P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = 1 \text{ è } \mathrm{P}_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \mathrm{P}_{\sigma_2\sigma_1,\sigma} \quad \text{hamma } \sigma_1, \sigma_2, \sigma \in \Omega \text{ lar ushun.}$$

Avloddan-avlodga o‘tish koeffisienti (2) (Λ, L) grafning strukturasi, allellar to‘plami (spenlar) Φ va μ o‘lchovning tanlanishiga bog‘liq bo‘ladi.

Ta’rif. Kvadratik operator (3) Voltero kvadratik operatori deyiladi, agarda avloddan-avlodga o‘tish koeffisienti quydagicha aniqlangan bo‘lsa:

$$p_{\sigma_1\sigma_2,\sigma} = \begin{cases} noldan\ farqli\ agar\ \sigma = \sigma_1 yoki\ \sigma = \sigma_2\ bo'lsa \\ \quad 0 \qquad bulsa\ qolgan\ hollar\ uchun \end{cases}$$

Teorema1. Agar $|\Phi| > 1$ va $|\Lambda| > 1$ bo‘lganda (3) kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo‘lishi uchun (Λ, L) -grafning bog‘liq graf bo‘lishi zarur va etarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik (Λ, L) -graf bog‘liq graf bo‘lsin: Agar $A(\sigma_1, \sigma_2) = \Lambda$ bo‘lsa, u holda o‘z-o‘zidan ma’lumki, $\Omega(\Lambda, \tilde{A}(\sigma_1, \sigma_2)) = \{\sigma_1\}$ bo‘ladi. Agar $A(\sigma_1, \sigma_2) \neq \Lambda$ bo‘lsa va

$A(\sigma_1,\sigma_2)\neq\varnothing$ bo'lsa, u holda $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)=\Lambda$ bo'ladi, bu erdan $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2))=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligi kelib chiqadi. Oxirida, agar $\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2)\neq\varnothing$ bo'lsa, u holda girafning bog'liqligidan $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2))=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ hosil bo'ladi, bundan esa $\sigma\neq\sigma_1,\sigma\neq\sigma_2$ lar uchun $P_{\sigma_1\sigma_2,\sigma}=0$ ligi kelib chiqadi, ya'ni unga mos keluvchi kvadratik stoxastik operator Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operatordir.

Endi faraz qilaylik kvadratik stoxastik operator (3) Voltero tipidagi kvadratik stoxastik operator bo'lsin. U holda ixtiyoriy σ_1,σ_2 lar uchun μ o'lchov musbat zichlikkadagi o'lchov bo'ladi va $\Omega(\Lambda,\tilde{A}(\sigma_1,\sigma_2))=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ ekanligiga ega bo'lamiz, bu esa (Λ,L) grafning bog'liqligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

$\sigma(x)$ larning mumkin bo'lgan qiymatlari va [3] statmexanika masalalaridan Φ fazoning ko'rinishini mumkin qadar soddalashtirish yoki qiyinlashtirish mumkin. [1] biologik adabiyotlardan shu narsa ma'lumki, ixtiyoriy gen allellarning har xil ko'rinishda mavjud bo'lishi mumkin. Populyatsiyada A allelni ”normal” yoki “sakroq” deb ataluvchi tipdagisiga kengaytiramiz, qolgan formalari mutant α allellar sifatida qaraladi.

Mutant allellarni ta'sir qildirib $\Phi=\{A,\alpha\}$ ikkita nuqtadan iborat bo'lgan holni qaraymiz.

Bernulli taqsimoti yordamida qurilgan kvadratik stoxastik operatorlar.

Faraz qilaylik $|\Lambda|=n$ va $\Phi=\{A,\alpha\}$ bo'lsin. Ixtiyoriy katak $\sigma\in\Omega$ uchun σ katakdagi (ya'ni “yutuqlar” soni) A allellar sonini $n_A(\sigma)$ -orqali belgilaymiz va μ_α o'lchovni на Ω da xuddi binomiyal taqsimot kabi beramiz: $\mu_\alpha(\sigma)=p^{n_A(\sigma)}q^{n-n_A(\sigma)}$

Bu erda $p\geq 0$, $q\geq 0$ $p+q=1$ va $p/q=\alpha$ dir. Agar $p=q$ bo'lsa, ya'ni $\alpha=1$ bo'lganda, o'lchov μ_1 Ω da normal taqsimotga aylanadi. Faraz qilaylik (Λ,L)- grafning qirralari to'plami bo'sh to'plam bo'lsin, ya'ni, Λ tutash chziqlarni ozida saqlamasin. Bu holda $n_A(\sigma_1)=n_A(\sigma_2)$ shartni qanoatlantiruvchi $\alpha_1 va\ \alpha_2$ kataklarni solishtirib $\Omega=\{\widetilde{\alpha_1},\widetilde{\alpha_2},\widetilde{\alpha_3}\ldots,\widetilde{\alpha_k},$ bu erda $\alpha_i-n_A(.)=i$ shartni qanoatlantiruvchi kataklar to'plami$\}$ kataklar fazosini hosil qilamiz. Bu erda taqsimot quydagicha aniqlanadi: $\mu_\alpha(\tilde{\alpha}_\iota)=C_n^i p^i q^{n-i}$ (4)

Faraz qilaylik $\tilde{V}_\alpha$ -(4) taqsimot yordamida qurilgan $S(\Omega)=\{x=(x_1,x_2,...,x_n):x_i\geq 0,\ i=\overline{0,n},\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$ sipleksda harakat qiluvchi kvadratik stoxastik operator bo'lsin.

Agar avloddan-avlodga o'tish qoidalari Mendel qoidalarini qanoatlantirsa, bu qoidalar yordamida qurilgan kvadratik operatorlar Mendel kvadratik operatorlar deyiladi [1]. Bir nechta kvadratik operatorlar yordamida qurilgan modellarni qaraymiz.

Ko'riladigan misollarning hammasida $p=q=1/2$ bo'lib, unga mos keluvchi graf qirrasiz $|\Lambda|$=n grafdir.

1. n=1 bo'lgan hol. Avloddan-avlodga o'tish modellari 70- yillarda Elston va St'yuartlar tomonidan [1] taklif qilingan. Ota va onasidan keyingi avlodga o'tish belgilari ehtimolning uchta ko'rsatkichi yordamida amalga oshriladi:

$p_{AA,A}$ -AA genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir;

$p_{Aa,A}$ - Aa genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir;

$p_{aa,A}$ -aa genotipli ота onadan bolasiga A allelni o'tish ehtimolidir va hokazo $p_{...,a}=1-p_{...,A}$.

Faraz qilaylik x_1 va x_2 – chastotalar mos ravishda A va α larning chastotalari bo'lsin. U holda ixtiyoriy $(x_1,x_2)\in S^1$ lar uchun kvadratik stoxastik operatorlar quydagicha aniqlanadi, xuddi shunday birinchi avloddan keyingi avlodga o'tishda allellar chastotasi (1) formula yordamida aniqlanadi:

$$\begin{cases} x_1' = p_{AA,A}x_1^2 + 2p_{Aa,A}x_1x_2 + p_{aa,A}x_2^2 \\ x_2' = p_{AA,a}x_1^2 + 2p_{Aa,a}x_1x_2 + p_{aa,a}x_2^2 \end{cases} \tag{5}$$

Mos keluvchi gepotezalar yordamida avloddan-avlodga o‘tishning Mendel tipidagi ehtimoli quyidagi ko‘rinishda topiladi:

A va A dan A ni hosil bo‘lishi $P_{AA,A}=1$
A va A dan α ni hosil bo‘lishi $P_{AA,\alpha}=0$
A va A dan A ni hosil bo‘lishi $P_{A\alpha,A}=1/2$
A va A dan α ni hosil bo‘lishi $P_{A\alpha,\alpha}=1/2$
A va A dan A ni hosil bo‘lishi $P_{\alpha\alpha,A}=0$
A va A dan α ni hosil bo‘lishi $P_{\alpha\alpha,\alpha}=1$.
Shunday qilib

$$\begin{matrix} p_{AA,A}=1 & p_{Aa,A}=1/2 & p_{aa,A}=0 \\ p_{AA,a}=0 & p_{Aa,a}=1/2 & p_{aa,a}=1 \end{matrix} \tag{6}$$

ni hosil qilamiz. (6) qiymatlarni (5)ga quyib

$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 \\ x_2' = x_2^2 + x_1x_2 \end{cases}$ ni hosil qilamiz. $x_1 + x_2 = 1$ ligini e’tiborga olsak oxirida

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_2 \end{cases} \tag{7}$$

bo‘ladi. Ya’ni avloddan-avlodga o‘tishda allellarning chastotasi o‘zgarmas bo‘lar ekan, bu Xardi-Vaynbergning birinchi qonunini tasdiqlaydi.

Tasdiq1. Xardi-Vaynbergning birinchi avloddan keyingi avlodga o‘tishda allel chastotasining o‘zgarmaslik qonuni avloddan-avlodga o‘tishning Mendel tipi uchun o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $p_{AA,A}=a$, $p_{Aa,A}=b$, $p_{aa,A}=c$, u holda Xardi-Vaynberg tasdig‘i quydagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x = ax^2 + 2bx(1-x) + c(1-x)^2 ,$$

Yoki bir qancha soddalashtirishdan keyin

$$x = (a-2b+c)x^2 + 2(b-c)x + c$$ ni olamiz.

U holda chastotaning o‘zgarmas bo‘lishi uchun

$\begin{cases} a-2b+c=0 \\ 2(b-c)=1 \\ c=0 \end{cases}$ bo‘lishi kerak.

Bu tenglamalar sistemasini yechib, $a=1$, $b=1/2$, $c=0$ ni olamiz. Bu erdan tasdiq1 ning isboti kelib chiqadi. (7) munosabatdan $V(S^1)=S^1$ ekanligi ya’ni kvadratik stoxastik operatorlarning suyrektiv ekanligi kelib chiqadi. 2. n=2 bo‘lgan hol. Faraz qilaylik x_1, x_2 va x_3 chastotalar $x=(x_1,x_2,x_3)\in S^2$- mos ravishda AA, Aa, aa genotiplarning chastotalari bo‘lsin.

$P_{AAAA,AA}$-AAAA genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir
$P_{AAAa,AA}$-AAAα genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir
$P_{AAaa,AA}$-AAα α genotipli ота onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir
$P_{Aaaa,AA}$-Aα α α genotipli ота-onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir
$P_{aaaa,AA}$-α α α α genotipli ота-onadan bolasiga AA genotip o‘tish ehtimolidir
va hakozo $P_{....,aa}$-$1-P_{...,AA}$, $P_{....,aA}$-$1-P_{...,Aa}$.

Mendel tipidagi avloddan-avlodga oʻtishda kvadratik operator $\{p_{ij,k}\}_{i,j,k=1}^{3}$ quyidagi koʻrinishga keladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

bu jadvaldagi qiymatlarni (5) ga qoʻysak

$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_1x_2 + 1/4x_2^2 \\ x_2' = x_1x_2 + 1/2x_2^2 + 2x_1x_3 + x_2x_3 \\ x_3' = 1/4x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2 \end{cases}$$ ni olamiz va uni soddalashtirib

$$\begin{cases} x_1' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases} \qquad (8)$$

ni hosil qilamiz.

Avloddan-avlodga oʻtishning keyingi chastotasini aniqlash uchun (5) ga x_1, x_2, x_3 larning oʻrniga mos ravishda x_1', x_2', x_3' larni qoʻyish zarur, ya'ni quyidagi tenglamani olamiz

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1' + 1/2x_2'')^2 \\ x_2'' = 2(x_1' + 1/2x_2')(x_3' + 1/2x_2') \\ x_3'' = (x_3' + 1/2x_2')^2 \end{cases} \qquad (9)$$

yoki (9) ga (8) ifodani qoʻyib, oxirida

$$\begin{cases} x_1'' = (x_1 + 1/2x_2)^2 \\ x_2'' = 2(x_1 + 1/2x_2)(x_3 + 1/2x_2) \\ x_3'' = (x_3 + 1/2x_2)^2 \end{cases}$$ ga ega boʻlamiz.

Bu erdan koʻrinadiki avloddan-avlodga oʻtishning keying keladigan bosqichlaridagi genotip chastotalari xuddi birinchi bosqichdagi kabi boʻladi. Bu xossani qiuydagi tasdiq koʻrinishida yozamiz.

Tasdiq.2. Avloddan-avlodga oʻtishda genotip chastotasining oʻzgarmasligi bitta bosqichdan soʻng amalga oshar ekan.

Chastotalarining oʻzgarmasligi Xardi-Vaynbergning qonunining uchunchi tasdigʻidir.

(8) munosabatdan koʻrinadiki (0;1;0) nuqtaning asli bush toʻplamdir, bundan kelib chiqadiki bu kvadratik stoxastik operator suyr'ektiv akslantirish emas.

Shunday qilib quyidagi teoremalarni isbotladik.

Теорема 2. Yuqorida aniqlangan $\tilde{V}_\alpha$- kvadratik stoxastik operator $\alpha = 1$ va $n = 1$ yoki $n = 2$ boʻlganda Mendel kvadratik stoxastik operatori boʻladi.

$x^{(k+1)}$ ketma – ketlik ikkinchi qadamdan boshlab qoʻzgʻalmas boʻlsa kvadratik stoxastik operatori Mendel kvadratik stoxastik operatori deyiladi.

Теорема 3. $\tilde{V}_\alpha$- kvadratik stoxastik operatori $\alpha = 1$ va $n = 1$ boʻlganda syurektiv kvadratik stoxastik operatori boʻladi, $n = 2$ syurektiv kvadratik stoxastik operatori boʻlmaydi.

ADABIYOTLAR

1. Генетика и наследственность. //Сб. статей. М.,1987. 300 с.
2. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
3. Гардинер К.В. Стохастические методы вестественных науках. М.: Мир. 1986, 528 с.