УДК 624.138

ЭЛАСТИК МУҲИТ УЧУН ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ШТАМП МАСАЛАСИНИНГ ЕЧИМЛАРИНИ АСОСЛАШ

Алмардонов Ойбек Махматқулович - катта ўқитувчи;
Суюнов Абдуғани Шавкат ўғли - ассистент. E-mail: suyunovsha@mail.ru

“ТИҚХММИ”МТУнинг Қарши ирригация ва агротехнологиялар институти. Қарши ш. Ўзбекистон.

Аннотация. *Ушбу мақолада геометрик профилнинг маълум қонуният асосидаги штампнинг эластик ярим текислик билан ўзаро таъсири масаласи кўриб чиқилган бўлиб, чегаравий шартларни кўчишларда берилган ҳоли учун ундаги кўчиш, деформация компоненталари, штамп чегарасидаги нормал кучланишлар ва ярим текисликнинг ички нуқталаридаги кучланишларни аниқлаш ҳолати келтирилган.*

Калит сўзлар: абсолют қаттиқ жисм, кўчиш, деформация компоненталари, чегаравий шартлар, нормал кучланишлар.

Abstract. *In this article, the issue of the interaction of the stamp with the elastic half-plane based on a certain regularity of the geometric profile is considered, and the case of determining the displacement, deformation components, normal stresses on the border of the stamp, and stresses at the internal points of the half-plane for the case where the boundary conditions are given in displacements is presented.*

Key words: absolute rigid body, displacement, deformation components, boundary conditions, normal stresses.

Контакт масалаларини ўрганишда ўзаро таъсирга киришаётган жисмлардан бирининг ўлчови иккинчисиникидан етарлича катта бўлса, иккинчи жисмни ярим фазо деб қаралади ва масаланинг бундай қўйилиши чегаравий шартларни соддалаштириб, аналитик ечимни топиш имкониятини беради. Деформацияланувчи ярим фазонинг хусусий ҳоли сифатида текис масалалар пайдо бўлади. Ярим эластик текисликни юпқа ўткир пластинка билан контакт масаласини (жамланган вертикал куч) Фламан [1] кўриб чиққан. Масала чегаравий шартларни қаноатлантирувчи куч функциясини аниқлашга келтирилиб, аналитик ечимлар топилган. Кейинчалик ярим текисликни чекли соҳасига қўйилган вертикал ва уринма кучланишлар таъсиридаги кучланганлик ҳолатинга тегишли асосий натижалар С.П.Тимошенко, Д. Ж. Гудьер [2] томонидан олинган. Бунда асосий муаммо чегаравий шартларнинг турига қараб сингуляр интеграл тенгламаларни ечимини топишга келади. Шуни таъкидлаш керакки, интеграл тенгламаларни эластиклик назариясига қўллаш ва аналитик ечимларни топиш Галин Л.А. [3], Мусхилишвили Н.И. [4], Назаров С.А. [5] томонидан амалга оширилган. Л.А.Галин томонидан контакт соҳасида сирпаниш мавжуд бўлган текис штамп масаласининг ечими топилган, бунда контакт соҳасидаги сирпанишдаги ишқаланиш кучи Кулон қонунига кўра қаралади. Фазовий контакт масалаларига тўхталиб ўтадиган бўлсак, сирт кучлари таъсиридаги ярим эластик фазонинг кучланганлик ҳолатини аниқлашда Буссинеск [6] ва Черрутиларни [7], кучланиш функцияси ёрламида аниқлаган ечимларини келтиришимиз мумкин. Чегарада Герц назариясига кўра тарқалган кучланишлар остидаги ярим фазонинг кучланганлик ҳоли Губер [8] томонидан ўрганилган бўлиб, бу масалани умумий ҳолда полином кўринишдаги кучланишлар остидаги ҳолни Лежандр полиномлари орқали аналитик ечими аниқлаган. Агар штамп масаласининг чегаравий шартлари ҳар хиллигини ҳисобга оладиган бўлсак, В.И. Массаковский ва Спенслар томонидан цилиндрик штампни контакт соҳасидаги ишқаланиш кучни ҳисобга олган ҳолда кўриб чиқилган ва бу ҳолда вертикал кучланиш шу йўналишдаги кўчишга пропорционал эканлигини аниқлашган. Эластик-пластик ярим фазони штамп таъсиридаги кучланганлик ҳолатига тўхталадиган бўлсак, бу йўналишда амалга оширилган изланишлар асосан Локетт [9], Ричмон [10], К.Джонсон [11], Хардиларга [12] тегишли. Бу илмий изланишларда Тресканинг пластиклик критерийси орқали ҳисобга олинган бўлиб, штампнинг ҳар хил геометрик формасига кўра ярим эластик фазода эластик ва пластик соҳалар аниқланган ва тахлил қилинган. К. Джонсон асосан пластик деформация ҳолатидаги соҳаларда разгрузкадан кейин қоладиган қолдиқ деформацияларни аниқлаган. Бундай масала қисман сирпанишга эга бўлган штампларда мураккаб структурага эга бўлиб, махсус ассимптотик методлар ёрдамида тақрибий ечимларни, кучланишларни топишга келади. Олинган тақрибий аналитик ечимларни тажрибада олинган натижалар билан солиштириш шуни кўрсатадики, аналитик ечимлар штамп чегарасига яқинроқ бўлган нуқталарда етарлича яқин бўлар экан. Штамп масаласи ишлаб чиқаришда кенг татбиқ этилгани учун бундай муаммолар чизиқли эластик-ёпишқоқ муҳитларда ҳам кўрилган. Умумлашган ёпишқоқ эластик модель асосида штамп масалалари ўрганилган бўлиб, улар асосан чизиқсиз тенгламалар системасига келади. Штампни оддий геометрик формасида олинган тенгламалар асосида асимптотик ечимларни тузиш масаласини В.Б. Зеленцов, В.М. Александровларнинг илмий изланишларида кўриш мумкин. Тузилган асимптотик ечимлар амалиётда олинган натижаларга ҳар доим ҳам мос келмас экан. Бунинг сабаби штампни эластик муҳит билан контактининг чегарасидага махсуслик ҳисобланади.

Қуйида техник масалаларда кўп учрайдиган, геометрик профили $z = Bx^{n+1}$ кўринишдаги штампни эластик ярим текислик билан ўзаро таъсири масаласини кўриб чиқамиз.

Бунга кўра чегарадаги кўчиш ва деформация компоненталари қуйидагича аниқланади:

$$\overline{u_z} = -Bx^{n+1}, \ \overline{\frac{\partial u}{\partial z}} = -(n+1)Bx^n, \qquad (1)$$

интеграл тенгламага келамиз.

Умумий назарияга кўра ярим текисликни $-b \le x \le a$ оралиғида кучланиш билан кўчиш компоненталари орасида қуйидагича боғланиш мавжуд ва чегаравий шартлар кўчишларда берилган бўлса

$$\begin{aligned} \int_{-b}^{a} \frac{q(s)}{x-s} ds &= \frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} p(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \bar{u}_x'(x), \\ \int_{-b}^{a} \frac{p(s)}{x-s} ds &= \frac{\pi(1-2\nu)}{2(1-\nu)} q(x) - \frac{\pi E}{2(1-\nu^2)} \bar{u}_z'(x). \end{aligned} \qquad (2)$$

Яъни интеграл тенгламаларга эга бўламиз.

Чегарадаги берилган кўчишларга кўра, бу муносабатлар $p(x)$ ва $q(x)$ нормал, уринма кучланишларга нисбатан интеграл тенгламаларни ташкил қилади. Интеграллаш соҳасида $s=x$ махсус нуқта бўлгани учун бу интеграл тенгламалар сингуляр интеграл тенгламалар дейилади.

Агар чегаравий шартлар 2- турга тегишли бўлса, у ҳолда юқорида келтирилган интеграл тенгламалар системаси

$$\int_{-b}^{a} \frac{F(s)}{x-s} ds = g(s),$$

кўринишга келади. Бунда $g(s)$- чегарадаги кўчишга боғлиқ бўлган функция.

Бу интеграл тенглама, биринчи тур сингуляр тенгламадан иборат бўлиб, кўпгина контакт масалалари бу кўринишга келади.

(1) тенгламанинг аналитик кўринишдаги умумий ечими

$$F(x) = \frac{1}{\pi^2[(x+b)(a-x)]^{1/2}} \int_{-b}^{a} \frac{[(s+b)(a-s)]^{1/2}}{x-s} g(s) ds + \frac{c}{\pi^2[(x+b)(a-x)]^{1/2}},$$ $g(x)$ функцияга боғлиқ бўлар экан.

Агар координата боши чегарадаги кучланишлар қўйилган соҳанинг ўртасига қўйилган бўлса, у ҳолда $F(x)$ функциянинг кўриниши соддалашади.

$$F(x)=\frac{1}{\pi^2(a^2-x^2)^{1/2}}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-s^2)^{1/2}}{x-s}g(s)ds+\frac{c}{\pi^2(a^2-x^2)^{1/2}}. \qquad (3)$$

Бунда: $c=\pi\int_{-b}^{a}F(x)dx$.

Юқоридаги келтирилган интеграллар хос интеграллардан иборат бўлиб:

$$\int_{-b}^{a}\frac{f(s)ds}{x-s}=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-b}^{x-\varepsilon}\frac{f(s)ds}{x-s}+\int_{x+\varepsilon}^{a}\frac{f(s)ds}{x-s}\right], \qquad (4)$$

лимит кўринишида ҳисобланади (Коши интеграли).

Бу интеграл тенгламанинг ечими (координата системасини марказга келтирадиган бўлсак)

$$p(x)=\frac{1}{\pi^2(a^2-x^2)^{1/2}}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-s^2)^{1/2}}{x-s}\frac{\pi E B S^n}{\alpha(1-\nu^2)}ds+\frac{c}{\pi^2(a^2-x^2)^{1/2}},$$

яъни ярим текислик сиртида (штамп таьсиридаги) нормал тарқалган кучнинг ифодаси келиб чиқади.

Шундай қилиб, чегарадаги нормал кучланишнинг тақсимоти

$$\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)^{\frac{1}{2}}s^n}{x-s}ds=I_n \qquad (5)$$

интегралга боғлиқ бўлар экан.

Келтирилган интегралнинг қиймати устида тўхталиб ўтамиз.

$$\begin{aligned}
&I_0=\int_{-1}^{1}\frac{(1-s^2)^{1/2}}{x-s}ds=\pi x,\\
&I_1=xI_0-I_0=(x-1)I_0, \qquad (6)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&I_n=x^nI_0-x^{n-1}I_0-x^{n-2}I_1-\ldots\ldots-xI_{n-2}-I_{n-1}.
\end{aligned}$$

Бунга кўра, штамп остидаги кучланиш қуйидагича кўринишда бўлар экан:

$$p(x)=-\frac{E(n+1)\,B\,a^{n+1}}{2(1-\nu^2)\pi}\frac{I_n}{(a^2-x^2)^{1/2}}+\frac{P}{(a^2-x^2)^{1/2}} \qquad (7)$$

Иккинчи масала сифатида, штамп сиртини ярим текислик билан ҳосил қиладиган контакт сирти $\overline{u_z}=d\cos x$ кўринишида бўлган ҳолни кўриб чиқамиз.

У ҳолда $(\overline{u_z})'=-d\sin x$ ва штампни абсолют силлиқ ($q(x)=0$)деб қарасак,

$$\int_{-a}^{a}\frac{p(s)}{x-s}ds=\frac{-\pi E}{2(1-\nu^2)}d\sin x. \qquad (8)$$

Бу тенламанинг ечими юқорида келтирилгандек

$$p(x)=-\frac{Ed}{2(1-\nu^2)\pi(a^2-x^2)^{1/2}}\int_{-a}^{a}\frac{(a^2-s^2)^{1/2}}{x-s}\sin s ds+\frac{c}{\pi^2(a^2-x^2)^{1/2}} \qquad (9)$$

муносабат орқали аниқланади.

Олинган нормал кучланишларни

$$\sigma_x = -\frac{2z}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)(x-s)^2 ds}{[(x-s)^2+z^2]^2},$$

$$\sigma_z = -\frac{2z^3}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)ds}{[(x-s)^2+z^2]^2},$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2z^2}{\pi}\int_{-b}^{a}\frac{p(s)(x-s)ds}{[(x-s)^2+z^2]^2},$$

муносабатларга қўйиб, ярим текисликни ички нуқталаридаги кучланишларни аниқлашимиз мумкин экан.

Бизга маълумки, иккита жисмнинг контакт масаласида улардан бири абсолют қаттиқ жисм деб қаралади ва контакт соҳаси эса етарлича кичик бўлганда масала ярим эластик фазонинг ўлчамлари чекли бўлган жисм таъсир масаласи билан алмаштирилади. Эластик жисмларнинг ўзаро таьсири масалаларида таьсир юзасининг ўлчовлари жисмларнинг ўлчовларидан анча кичик бўлганда, ўзаро таьсир юзасидаги кучланишлар жисмларнинг чегарасидан анча узоқда жойлашган нуқталарда уларнинг конфигурацияларига боғлиқ бўлмас экан.

АДАБИЁТЛАР

1. Flamant-Compt. Rendus, 1892
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. “Теория упругости” М.: Наука. 1979.
3. Галин А.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука. 1980.
4. Мусхилишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд. АН СССР. 1959.
5. Аргатов И.И., Назаров С.А. Метод сращиваемых разложений для задач с малыми зонами контакта // Механика контактных взаимодействия. М. :Физматлит, 2001. С. 73-82
6. Boussinesq J. Application des potentials ả l’ȇtude de l’ȇquilibre et du mouvement des solides ȇlastiques.-Paris: Gauther-Villard, 1885.
7. Cerrutti V. – Roma, Acc.Lincei, Mem. fis.mat. 1882
8. Huber M.T. Zur. Theorie der Berührung fester elastische Körper – Ann. der Phys., 1904, 14, s-153.
9. Lockett F.J.Indentation of a rigid-plastic material by a conical indenter.-J.Mech.and Phys. Of solids, 1963, 11,p. 345
10. Richmond O. Morrison H.L. Devenpeck M.L. Sphere indentation with application to the Brinell hardness test.-Internat. J. Mech. Sci. 1974, 16, p.75.
11. Джонсон К. “Механика контактного взаимодействия”. Москва. МИР. 1989.
12. Hardy C., Baronet C.N., Tordion G.V. Elastoplastic identation of a half-space by a rigid sphere.-J.Numerical Methods in Engng., 1971, 3, p.451.